

Шәкір Айдос 

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

7-дәріс. Бір айнымалылы функцияның туындысы мен дифференциалы

Дәрістің мақсаты – Бір айнымалылы функцияның туындысы мен дифференциалын табу және айырмашылығын білу

Негізгі сұрақтар:

1. Бір айнымалылы функцияның туындысы
2. Бір айнымалылы функцияның дифференциалы

1 Функцияның дифференциалы

$y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын болсын.

Анықтама 1.1 (4.2.1). Функция өсімшесі мына түрде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \quad (1.1)$$

өрнектелсе, онда $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде дифференциалданатын функция деп атайды, мұндағы A саны Δx -тен тәуелсіз, ал $\Delta x \rightarrow 0$ ұмтылғанда $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$.

$A\Delta x$ функцияның x_0 нүктесіндегі дифференциалы деп аталады да, оны dy немесе $df(x_0)$ белгілейді:

$$dy = A\Delta x. \quad (1.2)$$

Теорема 1.1 (4.2.1). $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде дифференциалдануы үшін оның осы нүктеде шекті туындысының бар болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеуі 1.1. Қажеттілігі. $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданатын болсын, онда (1.1) өрнек орынды. Енді $\Delta x \neq 0$ деп (1.1) өрнектен

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

аламыз. $\Delta x \rightarrow 0$ шекке өтсек,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

осыдан $f'(x_0) = A$, онда (1.2) өрнекті былай жазуға болады:

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \quad (1.3)$$

Жеткіліктілігі. $y = f(x)$ функциясының x_0 нүктесінде шектеулі туындысы бар болсын, онда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Демек,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) \quad \text{немесе} \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

мұндағы $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Соңғы өрнек (1.1) өрнекпен дәл келеді, демек, $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданады.

2 Дифференциалдау ережелері

Теорема 2.1 (4.3.1). Егер $u(x)$ және $v(x)$ функциялары x нүктесінде дифференциалданатын болса, онда осы нүктеде $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, ($v(x) \neq 0$) функциялар да x нүктесінде дифференциалданады және

$$\text{I)} \quad [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$\text{II)} \quad [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$\text{III)} \quad \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad (v(x) \neq 0).$$

Дәлелдеуі 2.1. I) Қосу және алу ережесін дәлелдеу.

$y(x) = u(x) \pm v(x)$ болсын. Тәуелсіз x айнымалысына Δx өсімшесін берейік, сонда $u(x)$, $v(x)$ және $y(x)$ функциялары сәйкесінше Δu , Δv , Δy өсімшелерін алады. Онда

$$\Delta y = [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] = \Delta u \pm \Delta v.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын да Δx -ке бөліп, шекке өтсек:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

x нүктесінде $u(x)$ және $v(x)$ функцияларының туындылары бар болғандықтан, сол жақтағы шек те бар. Демек,

$$y'(x) = u'(x) \pm v'(x),$$

қысқаша жазсақ, $y' = u' \pm v'$.

II) Көбейту ережесін дәлелдеу.

$y(x) = u(x) \cdot v(x)$ дейік. $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ өсімшелерін I пункттегідей алайық, онда

$$\Delta y = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = u(x + \Delta x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u.$$

Осы теңдіктің екі жағын да Δx -ке бөлеміз:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x + \Delta x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Егер $\Delta x \rightarrow 0$ десек, онда теореманың шарттары бойынша

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x).$$

Сонымен қатар, x нүктесінде $u'(x)$ туындысы бар болғандықтан, $u(x)$ функциясы x нүктесінде үзіліссіз, яғни

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) = u(x).$$

Енді осыны ескеріп, (2.1) теңдікте $\Delta x \rightarrow 0$ шекке өтеміз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x},$$

яғни

$$y'(x) = [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Қысқаша жазсақ, $y' = u'v + uv'$. II) дәлелденді.

III) Бөлуді дифференциалдау ережесін дәлелдеу.

$y = \frac{u}{v}$. Теореманың шарты бойынша $v(x) \neq 0$ және $v(x)$ функциясы x нүктесінде дифференциалданады.

Осыдан $v(x)$ үзіліссіз болады да, керегінше аз Δx мәндерінде $v(x + \Delta x) \neq 0$. Онда

$$\Delta y = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} = \frac{v(x) \cdot \Delta u - u(x) \cdot \Delta v}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}.$$

Соңғы теңдіктің екі жағын да Δx бөліп, шекке өтеміз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x)},$$

немесе

$$y'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Қысқаша жазсақ,

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Теорема дәлелденді.

Дифференциал анықтамасынан дифференциалды табу үшін функцияның туындысын анықтап, тәуелсіз айнымалының дифференциалына көбейту керек екені белгілі. Сондықтан дифференциалданатын $u = u(x)$, $v = v(x)$ функциялары үшін төмендегі формулалар орынды:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$,
2. $d(u \cdot v) = u dv + v du$,
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$.

Мысалы, 2-формуланы дәлелдейік:

$$d(u \cdot v) = (uv)' dx = (u'v + uv') dx = v du + u dv.$$

Дәл осылай 1, 3-формулаларды дәлелдеуге болады.

3 Күрделі функцияның туындысы

X жиынында $u = \varphi(x)$ функциясы анықталсын. Осы жиынның кез келген x_0 нүктесіне сәйкес келетін $u_0 = \varphi(x_0)$ нүктесі $y = f(u)$ функциясының анықталу облысында жатсын. Сонда X жиынында $y = f(\varphi(x))$ функциясы анықталады. Осындай функцияны күрделі функция деп атайтыны белгілі, мұндағы x тәуелсіз айнымалы, u аралық айнымалы.

Теорема 3.1. Егер $u = \varphi(x)$ функциясы x_0 нүктесінде, сондай-ақ $y = f(u)$ функциясы $u_0 = \varphi(x_0)$ нүктесінде дифференциалданатын болса, онда күрделі функция $y = f[\varphi(x)]$ функциясы x_0 нүктесінде дифференциалданады және

$$y'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0) = f'[\varphi(x_0)]\varphi'(x_0) = f'_u \cdot \varphi'_x|_{x=x_0}.$$

Дәлелдеу. x_0 аргументіне Δx өсімшесін береміз, онда u функциясы Δu өсімшесін алады. Теорема шарты бойынша $y = f(u)$ функциясы $u_0 = \varphi(x_0)$ нүктесінде дифференциалданады, демек, оның өсімшесі

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u, \quad \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0.$$

Δx -ке бөлсек:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

$x \rightarrow x_0$ шекке өтсек, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x_0)$ және $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0$, сонда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0) \varphi'(x_0) \Rightarrow y'(x_0) = f'(u_0) \varphi'(x_0).$$

Теорема дәлелденді.

Ескерту. Күрделі функциясын дифференциалдау ережесі әдетте былай жазылады:

$$\{f(\varphi(x))\}' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \text{немесе} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Күрделі функцияны дифференциалдау ережесін кез келген саны шекті функциялардың композициясына жалпылауға болады:

$$v = v(x), \quad u = u(v), \quad y = y(u) \implies y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

Дифференциал түрінің инварианттылық қасиеті

Егер $y = f(x)$ функциясында x тәуелсіз айнымалы болса, онда оның дифференциалы:

$$dy = f'(x)dx.$$

$x = \varphi(t)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда $y = f(\varphi(t)) = z(t)$ күрделі функция болады.

Күрделі функцияның туындысы:

$$z'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Дифференциал анықтамасы бойынша:

$$dy = z'(t)dt = f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \quad dx = \varphi'(t)dt.$$

Онда:

$$dy = f'(x)dx.$$

Сонымен, x тәуелсіз айнымалы болғанда немесе ол басқа айнымалыдан тәуелді функция болса да дифференциалдың формасы сақталады. Бұл қасиет дифференциалдың **инварианттылық қасиеті** деп аталады.

Мысалдар

$y = (\ln x)^3$ функциясының туындысын табайық.

Шешу. $y = u^3$, $u = \ln x$ болсын. (4.4.17) формуланы қолданамыз:

$$y'_u = 3u^2, \quad u'_x = \frac{1}{x}.$$

Сонда:

$$y'_x = 3u^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3(\ln x)^2}{x}.$$

$y = \sin[\cos^2(\tan^3 x)]$ функциясының туындысын табайық.

Шешу. Егер $y = \sin u$, $u = \cos^2 v$, $v(x) = \tan^3 x$ белгілесек, онда берілген функция мына түрде жазылады: $y = \sin[u(v(x))]$. (4.4.18) формула бойынша күрделі функцияның туындысы:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \cos u(v(x)) \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

Мұндағы:

$$u'_v = -\sin 2v, \quad v'_x = 3 \tan^2 x \cdot \sec^2 x.$$

Сондықтан:

$$y'_x = -3 \cos[\cos^2(\tan^3 x)] \cdot \sin(2 \tan^3 x) \cdot \tan^2 x \cdot \sec^2 x.$$

4 Қосымша ақпарат

Студент толық ақпаратты [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14] жұмыстардан қарауға болады.

Список литературы

- [1] Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т. Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 1-том. – 562 б. 4
- [2] Жәутіков О.А. Математикалық анализ курсы. – Алматы: Экономика, 2014. – 832 б. 4
- [3] Темірғалиев Н.Т. Математикалық анализ. – Алматы: Мектеп, 1987. – 1-том. – 288 б. 4
- [4] Темірғалиев Н.Т. Математикалық анализ. – Алматы: Ана тілі, 1991. – 2-том. – 400 б. 4

- [5] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 1. – 616 с. 4
- [6] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука-Физматлит, 1998. – Часть 2. – 448 с. 4
- [7] Зорич В.А. Математический анализ. – М.: МЦНМО, 2012. – Т. 1. – 702 с. 4
- [8] Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1981. – Том 1. – 687 с. 4
- [9] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 1. – 680 с. 4
- [10] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматлит, 2003. – Том 2. – 802 с. 4
- [11] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с. 4
- [12] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – СПб.: Профессия, 2001. – 432 с. 4
- [13] Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2005. – Том 1. – 400 с. 4
- [14] Сатыгулова С., Исакова А.Қ., Айтжанов С.Е. Математикалық анализ I. – Алматы: Қазақ университеті, 2020. – 236 б. 4